| | |
|---|---|
| Title | WILLMORE CONJECTURE AND INTEGRABLE SYSTEMS : AFTER M. U. SCHMIDT, I. A. TAIMANOV ETC.(Submanifold theory related to the Integrable Systems and Geometric analysis) |
| Author(s) | 大仁田, 義裕 |
| Citation | 数理解析研究所講究録 (2008), 1577: 117-125 |
| Issue Date | 2008-01 |
| URL | http://hdl.handle.net/2433/81357 |
| Right | |
| Type | Departmental Bulletin Paper |
| Textversion | publisher |

数理解析研究所講究録
第 1577 巻 2008 年 117-125



# WILLMORE CONJECTURE AND INTEGRABLE SYSTEMS (AFTER M. U. SCHMIDT, I. A. TAIMANOV ETC.)

阪市大・理学研究科　大仁田　義裕 (Yoshihiro Ohnita)
Department of Mathematics,
Osaka City University

## 序

本講演では，昨年度に引き続き（[AT],[Moriya],[OOU]），I. Taimanov, M. U. Schmidt らによる Willmore 予想に対する可積分系によるアプローチおよびその周辺に関する谷口哲也氏（[TTaniguchi]），乙藤隆史氏（[Otofuji]）の解説を踏まえ，M. U. Schmidt の理論（[Sch02]）の概略を紹介した.

## 1. Willmore 予想

Willmore 予想とは，多くの幾何学者の関心を惹きつけてきた古典的微分幾何学における曲面論の有名な問題の一つである．それは，次のように述べられる予想である.

**Willmore 予想（Willmore conjecture）**

$M$ をジーナス 1 の 2 次元連結コンパクト向き付け可能 $C^\infty$-多様体とする．$M$ の 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ への $C^\infty$-はめ込み（immersion）を $F: M \longrightarrow \mathbf{R}^3$ とする．$H$ をはめ込み $F$ の平均曲率（mean curvature）とする．このとき，不等式

$$\int_M H^2 dv \geq 2\pi^2$$

が成り立ち，等号

$$\int_M H^2 dv = 2\pi^2$$

が成立するのは，$F$ は埋め込み（embedding）で，$F(M)$ は中心から回転軸との距離が $\sqrt{2}$ の半径 1 の円を生成曲線とする回転面 $T(1, \sqrt{2})$（**Clifford torus**）と共形変換で移りあうときに限る.

閉曲線の全曲率に関する Fenchel の定理の一般化とも考えられる.

Willmore 予想に関して現在まで知られている結果や研究方法の解説については，[Ando] がある．可積分系（Integrable Systems）による Willmore 予想へのアプローチは，従前にはなかったアプローチと考えられる.

## 2. 幾何学的変分問題

無限次元ベクトル空間 $C^\infty(M, \mathbf{R}^3)$ の開集合

$$\mathrm{Imm}(M, \mathbf{R}^3) := \{F : M \longrightarrow \mathbf{R}^3,\ C^\infty\text{-immersion}\}$$

上の **Willmore 汎関数** $\mathcal{W} : \mathrm{Imm}(M, \mathbf{R}^3) \longrightarrow \mathbf{R}$ は,

$$\mathcal{W}(F) := \int_M H^2 dv$$

によって定義される. ここで, $dv$ は, はめ込み $F$ による誘導計量に関する面積要素を表わす. $\mathcal{W}(F)$ は, はめ込み $F$ の **Willmore エネルギー** (Willmore energy) と呼ばれる.

Willmore 汎関数 $\mathcal{W}$ の重要な性質は,「$\mathbf{R}^3$ における共形変換で不変である」ことである.

Willmore 予想は, 汎関数 $\mathcal{W}$ の最小点 (minimizer) の存在と決定 ($\mathrm{Min}\mathcal{W} = 2\pi^2$) の問題であるが, $\mathbf{R}^3$ における共形変換全体の群の非コンパクト性から生じる困難さがある.

**定理** (L. Simon [Si1], [Si2]). $\mathcal{W}$ の最小点は存在する. ここで, $M$ のジーナスは任意に固定されている.

Willmore 汎関数 $\mathcal{W}$ の臨界点 ($\mathcal{W}'(F) = 0$ なるはめ込み $F$) は, **Willmore 曲面** (Willmore surface) と呼ばれる. Willmore トーラス面 (Willmore tori) の分類, その Willmore エネルギー $\mathcal{W}(F)$ の評価を研究することは, Willmore 予想に直接関わる.

この問題は, 部分多様体論における有名な幾何学的変分問題の一つとして幾何解析の立場から研究されてきた歴史があるが, 1990 年代後半, I. Taimanov [Tai] は, 可積分系の立場から Willmore 予想の研究方法を提起し, M. U. Schmidt [Sch02] は, 可積分系による Willmore 予想へのアプローチを展開しており, 大変興味深い.

ここでは, 安藤直也氏 (熊本大理) によって組織された前年度の研究集会に引き続き, M. U. Schmidt [Sch02] の理論について紹介することが目的である. 今回の谷口哲也氏 (北里大), 乙藤隆史氏 (日本大工) の論説との関連についても触れなければならない.

## 3. 曲面論と可積分系

微分幾何学における曲面論と可積分系 (ソリトン方程式) の間には, 19 世紀からの長い歴史がある.

曲面論の古典的微分幾何学における有名な H. Hopf の問題の研究により, Wente は最初に, **平均曲率一定トーラス面 (CMC tori) の存在**を示した.

共形的はめ込み $F : M = \mathbf{R}^2/\Lambda \longrightarrow \mathbf{R}^3$ が平均曲率一定 (CMC)

$\Updownarrow$

$F$ のガウス写像 $M \to S^2$ は調和写像.

$\Downarrow$

sinh-Gordon 方程式の 2 重周期解（ソリトン方程式）

$\Downarrow$

有限型の解（finite type solution）

$\Updownarrow$

歪ループ代数（twisted loop algebra）$\Lambda\mathfrak{g}_\sigma^{\mathbf{C}}$ の有限次元ベクトル部分空間 $\Lambda_d := \{\sum_{i=-d}^{d} \xi_i \lambda^i\}$ 上のある Lax 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [A, L]$$

（行列多項式系（matrical polynomial system）とも呼ばれる）

$\Downarrow$

ある有限次元複素シンプレクティック多様体 $\mathcal{M}$ 上の完全積分可能ハミルトン系（Algebraically Completely Integrable Hamiltonian System）

ここで，この $\mathcal{M}$ は，リーマン球面 $\mathbf{C}P^1 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ 上の Higgs 束 $(E, \Phi)$ のモジュライ空間である.

これは，Hitchin-Markman 系と呼ばれるより広い ACIHS のクラスに属する.

ここで帰着された可積分系は有限次元であるが，Willmore 予想へのアプローチにおいては真に無限次元可積分系が現れる.

## 4. M. U. Schmidt の理論

主張：

① $\exists$ Willmore 汎関数 $\mathcal{W}$ の最小点（Existence of Minimizers）

② Willmore 汎関数 $\mathcal{W}$ の最小点の分類（Determination of Minimizers）

主張の証明を目指すために，まず，何らかの対応

$$\mathrm{Imm}(M, \mathbf{R}^3) \cong [\text{パラメータ空間}][(\text{Parameter space})]$$
$$\longrightarrow \text{モジュライ空間 (Moduli space)}$$

の構成を考えることが出発点となる.

この対応の構成の基本原理となるのが，「**剱持勝衛先生の表現公式**」([Ken]) である．これは次を主張している：

リーマン面 $(M, \text{conformal class})$ から 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ への共形的はめ込み $F$ が存在するならば，$F$ の平均曲率 $H$　$F$ のガウ

ス写像 $\varphi : M \to S^2(1) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ は**一般調和写像方程式** (generalized harmonic equation)

$$H\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}} - \frac{2\bar{\varphi}}{1+\varphi\bar{\varphi}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\right) = \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}$$

を満たす. $M$ が単連結ならば, この逆も成り立つ.

極小曲面, 平均曲率一定曲面のみならず, ずっと広く、「共形的はめ込み」を考察の対象にしているところにこの公式の着眼の素晴らしさがある.

**共形はめ込みの空間**:

上半平面

$$\mathcal{T}_1 := \{\tau \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}\tau > 0\}$$

はジーナス 1 の閉リーマン面の Teichmüller 空間を表わす : 各 $\tau \in \mathcal{T}_1$ に対して, $\mathbf{R}^2$ の格子

$$\Lambda = \mathbf{Z}1 + \mathbf{Z}\tau$$

によるジーナス 1 の閉リーマン面

$$(M, \tau) = \mathbf{R}^2/\Lambda = \mathbf{Z}1 + \mathbf{Z}\tau$$

が定まる.

各 $\tau \in \mathcal{T}_1$ に対して,

$$\mathrm{CImm}((M,\tau), \mathbf{R}^3) := \{F : (M,\tau) \longrightarrow \mathbf{R}^3 \text{ 共形的はめ込み }\}$$

と定める. これは, $\mathrm{Imm}(M, \mathbf{R}^3)$ の部分集合であり, $\mathrm{Imm}(M, \mathbf{R}^3)$ は,

$$\mathrm{Imm}(M, \mathbf{R}^3) = \coprod_{\tau \in \mathcal{T}_1} \mathrm{CImm}((M,\tau), \mathbf{R}^3)$$

のように分割される.

そこで, Willmore 汎関数 $\mathcal{W}$ の各 $\mathrm{CImm}((M,\tau), \mathbf{R}^3)$ への制限

$$\mathcal{W} : \mathrm{CImm}((M,\tau), \mathbf{R}^3) \longrightarrow \mathbf{R}$$

を考えることができる.

今, 任意に $\tau \in \mathcal{T}_1$ を固定する. ジーナス 1 の閉リーマン面から 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ への任意の共形的はめ込みを

$$F : (M,\tau) \cong \mathbf{R}^2/\Lambda \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

とする. $(M,\tau) \cong \mathbf{R}^2/\Lambda$ の標準正則座標系 $z = x + \sqrt{-1}y$ に関する $M$ 上の標準標構を $\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\}$, 余標準標構を $\{dz, d\bar{z}\}$ とする. ある $u \in C^\infty(\mathbf{R}^2/\Lambda)$ が存在して,

$$F^* g_{\mathbf{R}^3} = e^{2u} dz d\bar{z}$$

が成り立つ（はめ込み $F$ の共形性）．ここで，$g_{\mathbf{R}^3}$ は3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の標準的計量を表わす．

$$\mathrm{CImm}(\mathbf{R}^2/\Lambda, \mathbf{R}^3) \subset \mathrm{Imm}(\mathbf{R}^2/\Lambda, \mathbf{R}^3) \subset C^\infty(\mathbf{R}^2/\Lambda, \mathbf{R}^3)$$

**ポテンシャルの空間**：

$H$ をはめ込み $F$ の平均曲率

$$U := -\frac{e^u}{2} H \in C^\infty(\mathbf{R}^2/\Lambda)$$

とおく．

$$4\|U\|^2_{L^2} = 4\int_{\mathbf{R}^2/\Lambda} U^2 dxdy = \int_{\mathbf{R}^2/\Lambda} H^2 dv = \mathcal{W}(F)$$

ポテンシャル $U \in C^\infty(\mathbf{R}^2/\Lambda)$ に対して，**ディラック作用素** $\mathcal{D}_U$ は

$$\mathcal{D}_U := \begin{pmatrix} U & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial \bar{z}} & U \end{pmatrix}$$

によって定義される．

今，ポテンシャルの集合

$$\mathcal{P} := \Big\{ U \in C^\infty(\mathbf{R}^2/\Lambda) \mid \exists \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \mathbf{C}^2\text{-valued function}$$
$$\text{with condition (PC) such that} \quad \mathcal{D}_U \psi = 0 \Big\}$$
$$\subset C^\infty(\mathbf{R}^2/\Lambda) \subset L^2(\mathbf{R}^2/\Lambda)$$

と定める．ここで，周期性条件 (PC) は，次で定義される：

(PC) 2個の閉1次微分形式 $\psi_1^2 dz - \psi_2^2 d\bar{z}$, $\psi_1\bar{\psi}_2 dz + \bar{\psi}_1\psi_2 d\bar{z}$ は，$\mathbf{R}^2/\Lambda$ のすべての1-サイクルの上での積分が零になる．

各 $F \in \mathrm{CImm}(\mathbf{R}^2/\Lambda, \mathbf{R}^3)$ に対して，$U \in \mathcal{P}$ が唯一対応する．逆に，$U \in \mathcal{P}$ に対して，$F \in \mathrm{CImm}(\mathbf{R}^2/\Lambda, \mathbf{R}^3)$ が $\mathbf{R}^3$ の合同変換を除いて存在する．この定理の原形は，剱持 [Ken] の表現公式であり，ディラック方程式 $\mathcal{D}_U\psi = 0$ は，剱持 [Ken] の一般調和写像方程式に相当する．

**複素 Fermi 曲線**：

今，各 $k = (k_1, k_2) \in \mathbf{C}^2$ に対して，加法群 $\Lambda$ を構造群とする主束

$$\Lambda \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}/\Lambda = \mathbf{R}^2/\Lambda = M$$

の構造群の表現

$$\rho_k : \Lambda \in \gamma \longmapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle k, \gamma\rangle)\mathrm{I}_2 \in \mathbf{C}^* \cdot \mathrm{I}_2 \subset GL(2, \mathbf{C})$$

に関する階数 2 の同伴複素正則ベクトル束 $E_k := \mathbf{C} \times_{\rho_k} \mathbf{C}^2$ を考える．複素ベクトル束 $E_k$ の $C^\infty$-断面全体のなす複素ベクトル空間 $\Gamma(E_k)$ は，

$$\{f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^2 \mid f(z+\gamma) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle k, \gamma\rangle)^{-1} f(z) \quad \text{for } \forall z \in \mathbf{C}, \forall \gamma \in \Lambda\}$$

と同一視される．**ディラック作用素** $\mathcal{D}_U : C^\infty(\mathbf{C}; \mathbf{C}^2) \to C^\infty(\mathbf{C}; \mathbf{C}^2)$ は $\Gamma(E_k)$ に制限することができ，これを，

$$\mathcal{D}(U, k) : \Gamma(E_k) \longrightarrow \Gamma(E_k)$$

によって表わす．$\mathcal{D}(U,k)\psi = 0$ なる $0 \neq \psi \in \Gamma(E_k)$ が存在するとき，$k$ は**準運動量** (quasi-momentum) と呼ばれる．

さらに，各 $U \in \mathcal{P}$ に対して，

$$\mathcal{F}(U) := \{k \in \mathbf{C}^2 \mid U \text{ の準運動量 }\} \subset \mathbf{C}^2$$

と定める．ここで，

$$U \text{ の準運動量} \iff \mathrm{Ker}(\mathcal{D}(U,k)) \neq \{0\} \iff \mathcal{D}(U,k) \text{ は 0-固有値をもつ}$$

に注意する．このとき，線型作用素のスペクトル理論により，$\mathcal{F}(U)$ は，$\mathbf{C}^2$ の複素解析的曲線になることが示される．$\mathcal{F}(U)$ は，ポテンシャル $U$ の**複素 Fermi 曲線** (complex Fermi curve) と呼ばれる． それは有限種数とは限らず，実際に無限種数の複素 Fermi 曲線の解析やそのモジュライ空間の研究が必要となる． 複素 Fermi 曲線 $\mathcal{F}(U)$ は，ポテンシャル $U$ のすべての情報を含んでおり，複素 Fermi 曲線 $\mathcal{F}(U)$ からポテンシャル $U$ の逆構成が可能である． これが Bloch 理論であり，ここでの議論は，無限可積分系の Davey-Stewartson 方程式の立場から捉えることができる．

ここで，一つの重要な主張は，$\mathcal{F}(U)$ が $\mathbf{R}^3$ の共形変換による共形はめこみ $F$ の変更で不変であること（複素 Fermi 曲線の共形不変性）である ([Gri-Sch])．

このような議論を，次のように「複素化完備化」による枠組みの拡張をしておくことは大切で，それによりこの理論の無限可積分系としての幾何学的様相がより明確にされる．

$L^2(\mathbf{R}^2/\Lambda)$ によって，$\mathbf{R}^2/\Lambda$ 上の複素数値 $L^2$-関数全体のなすヒルベルト空間を表す．写像

$$\mu : L^2(\mathbf{R}^2/\Lambda) \times L^2(\mathbf{R}^2/\Lambda) \ni (V, W) \longmapsto \mathcal{F}(V, W) \in \mathcal{M}_{Lambda}$$

が構成される． ここで，

$$\mathcal{D}(V, W) := \begin{pmatrix} V & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial \bar{z}} & W \end{pmatrix}$$

で,

$$\mathcal{F}(V,W) := \{k \in \mathbf{C}^2 \mid \mathrm{Ker}(\mathcal{D}(V,W,k)) \neq \{0\}\}$$

もまた $\mathbf{C}^2$ の複素解析的曲線になり，ポテンシャル $V, W$ の**複素 Fermi 曲線** (complex Fermi curve) と呼ばれる． 写像 $\mu$ は, $L^2(\mathbf{R}^2/\Lambda)\times L^2(\mathbf{R}^2/\Lambda)$ を無限次元シンプレクティック多様体 $T^*L^2(\mathbf{R}^2/\Lambda)$ とみなしたとき，運動量写像として解釈が可能である.

前出の共形的はめ込みに対応するポテンシャルの空間 $\mathcal{P}$ は,

$$\mathcal{P} \ni U \longmapsto (U,U) \in L^2(\mathbf{R}^2/\Lambda) \times L^2(\mathbf{R}^2/\Lambda)$$

のように埋め込まれる.

**複素 Fermi 曲線のモジュライ空間**：

$\mathcal{M}_\Lambda$ は，複素 Fermi 曲線のモジュライ空間

$$\mathcal{M}_\Lambda := \{\mathcal{F}(V,W) \mid (V,W) \in L^2(\mathbf{R}^2/\Lambda) \times L^2(\mathbf{R}^2/\Lambda)\}$$

であり，無限次元複素 Banach 多様体になる，その中で有限種数の複素 Fermi 曲線全体からなる部分集合は稠密になる，ことが主張されている.

$\mathcal{M}_\Lambda$ には，実構造 $\rho,\eta$ が次のように導入される：$\mathbf{C}^2$ 上の 2 個の反正則対合

$$\rho : \mathbf{C}^2 \ni k \longmapsto \bar{k} \in \mathbf{C}^2, \quad \eta : \mathbf{C}^2 \ni k \longmapsto -\bar{k} \in \mathbf{C}^2,$$

は，複素 Fermi 曲線の間の同型：

$$\rho : \mathcal{F}(V,W) \cong \mathcal{F}(\bar{V},\bar{W}), \qquad \eta : \mathcal{F}(V,W) \cong \mathcal{F}(\bar{W},\bar{V})$$

を誘導し，特に，各 $U \in L^2(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ に対し，$\mathcal{F}(U,\bar{U})$ 上に $\eta : k \mapsto -\bar{k}$ で定まる反正則対合が，そして，$U$ が実数値関数のときは，$\mathcal{F}(U,U)$ 上に $\rho : k \mapsto \bar{k}$ で定まる反正則対合が存在する．また, $\sigma = \eta\circ\rho : k \mapsto -k$ は正則対合であり, 同型

$$\sigma : \mathcal{F}(V,W) \cong \mathcal{F}(W,V)$$

を誘導する.

$\mathcal{M}_{\Lambda,\rho,\eta}$ によって $\mathcal{M}_\Lambda$ の $\rho,\eta$ による固定点部分集合を表すと,

$$\mathcal{M}_{\Lambda,\rho,\eta} = \{\mathcal{F}(U,U) \mid U \in L^2(\mathbf{R}^2/\Lambda) \text{ 実ポテンシャル }\}$$

となる.

周期性条件 (PC) を満たす実ポテンシャル $U \in L^2(\mathbf{R}^2/\Lambda)$ の複素 Fermi 曲線 $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(U,U)$ は，**Weierstrass 曲線** (Weierstrass curve) と呼ばれる.

複素 Fermi 曲線に対するある**特異性条件** (SC) ([Sch02, p.197]) が見出され，特異性条件 (SC) を満たす $\mathcal{F}(U,U) \in \mathcal{M}_{\Lambda,\rho,\eta}$ からなる部分集合を $\mathcal{M}_{\Lambda,\rho,\eta,\mathrm{SC}}$ で表すとき，

$$\mathcal{M}_{\Lambda,\rho,\eta,\mathrm{SC}} = \{\mathcal{F}(U) \mid \text{ Weierstrass 曲線 }\}$$

が成り立つ．特異性条件 (SC) よりいくらか弱い条件として，**弱特異性条件** (WSC) ([Sch02, p.155]) が考えられた． $\mathcal{F}(U,U) \in \mathcal{M}_{\Lambda,\rho,\eta}$ からなる部分集合を $\mathcal{M}_{\Lambda,\rho,\eta,\mathrm{WSC}}$ で表す:

$$\mathcal{M}_{\Lambda,\rho,\eta,\mathrm{SC}} \subset \mathcal{M}_{\Lambda,\rho,\eta,\mathrm{WSC}} .$$

**一般化された Willmore 汎関数**：

Willmore 汎関数 $\mathcal{W} : \mathcal{M}_{\Lambda,\rho,\eta,\mathrm{WSC}} \to \mathbf{R}$ を考える． 任意の $w > 0$ に対して，

$$\mathcal{M}_{\Lambda,\rho,\eta,\mathrm{WSC},w} := \{\mathcal{F} \in \mathcal{M}_{\Lambda,\rho,\eta,\mathrm{WSC}} \mid \mathcal{W}(\mathcal{F}) \le w\}$$

を定める． Willmore 汎関数 $\mathcal{W} : \mathcal{M}_{\Lambda,\rho,\eta,\mathrm{WSC},w} \to \mathbf{R}$ の最小元の存在を議論するために，$\mathcal{M}_{\Lambda,\rho,\eta,\mathrm{WSC},w}$ の $\mathbf{C}^2$ の一点コンパクトから定まる有限位相（ハウスドルフ距離）に関するコンパクト化 $\bar{\mathcal{M}}_{\Lambda,\rho,\eta,\mathrm{WSC},w}$ が考えられ，$\bar{\mathcal{M}}_{\Lambda,\rho,\eta,\mathrm{WSC},w}$ まで拡張された Willmore 汎関数, 即ち**一般化された Willmore 汎関数** (generalized Willmore functional) $\tilde{\mathcal{W}}$, の下半連続性により，$\tilde{\mathcal{W}}$ の $\bar{\mathcal{M}}_{\Lambda,\rho,\eta,\mathrm{WSC},w}$ における最小元の存在が主張されている． 次に，$\tilde{\mathcal{W}}$ の $\bar{\mathcal{M}}_{\Lambda,\rho,\eta,\mathrm{WSC},w}$ の極小元（局所的に最小な元）の特徴付けが議論され,「極小元になる複素 Fermi 曲線は有限種数である」という性質は導かれる．最終的に，最小元になる複素 Fermi 曲線の分類がなされる． 結果として，各 $\tau \in \mathcal{T}_1$ に対して，一般 Willmore 汎関数の最小値が具体的に決定され，実際に，$T(1,\sqrt{2})$ あるいはクリフォード・トーラス面のとき，あらゆる $\tau \in \mathcal{T}_1$ に対する最小値 $2\pi^2$ が取られていることがわかる．

## 5. 後記

F. Pedit, U. Pinkall, F. Burstall らのアプローチ（四元数正則幾何，スペクトル曲線）もまた密接に関わる．また, A. Ros, M. Haskins などの研究のように他のアプローチがなされる可能性もあると思われる．が，Willmore 予想に対する M. U. Schmidt の理論は,「なぜ Willmore 予想が成り立つか？を説明する数学を作ろうとしている。」と思える。

また，M. U. Schmidt の理論は，劔持先生が提起された問題 66 ([Kenmotsu]) や平均曲率が周期的な曲面の構成の研究とも密接に関わると思われる．

今回は，M. U. Schmidt の議論を辿って紹介したに過ぎないが，コンパクト化の構成，一般 Willmore 汎関数の定義など，私自身は充分に納得できているとは言い難い． しかし，その理論はスケールが大きくそれが完成されることは大変に興味深く，今後も検討続けて行きたい．

## REFERENCES


[Ken] K. KENMOTSU, *Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature*, Math. Ann., **245** (1979) 89–99.

[Si1] L. SIMON, *Existence of Willmore surfaces*, Proc. Centre for Math. Anal. **10** (1985) 187–216.

[Si2] L. SIMON, *Existence of surfaces minimizing the Willmore functional*, Commun. in Anal. and Geom. **1** (1993) 281–326.

[Gri-Sch] P. Grinevich and M. U. Schmidt: Conformal invariant functionals of immersions of tori into $\mathbf{R}^3$. J. Geom. Phys. **26** (1998), 51-78.

[GT06] P. G. Grinevich and I. A. Taimanov: *Infinitesimal Darboux transformations of the spectral curves of tori in the four-space.* math.DG/0611215v1.

[Sch02] M. U. Schmidt, *A proof of the Willmore conjecture*, math.DG/0203224.

[Sch04] M. U. Schmidt, *Existence of minimizing Willmore surfaces of prescribed conformal class*, math.DG/0403301.

[Tai] I. A. TAIMANOV, *The Weierstrass representation of closed surfaces in* $\mathbf{R}^3$, Funct. Anal. Appl., **32** (1998) 258–267.

[Tai03] I. A. Taimanov: *Finite gap theory of the Clifford torus.* math-ph/0312059 v2.

[Kenmotsu] 剱持勝衛: 未解決問題集 問題 66-71, 21 世紀の数学 幾何学の未踏峰, 宮岡礼子/小谷元子 [編], 日本評論社, 2004, 389-390 (in Japanese).

[Ando] 安藤直也: Willmore 予想について, (in Japanese), In: WHAT IS GEOMETRY?, TMUGS, http://tmugs.math.metro-u.ac.jp/index-j.html

[AT] 安藤直也, 谷口哲也: Willmore 予想およびその書き換え 〜$\mathbf{E}^3$ にはめこまれたトーラス上の Dirac 作用素およびその複素 Fermi 曲線〜, 数理解析研究所講究録 1527, 「部分多様体論のさらなる発展に向けて」(2006 年 7 月 10 日〜7 月 12 日) 研究集会報告集, 74-99 (in Japanese).

[Moriya] 守屋克洋: Minimizing sequences for the Willmore functional and quaternions, 数理解析研究所講究録 1527, 「部分多様体論のさらなる発展に向けて」(2006 年 7 月 10 日〜7 月 12 日) 研究集会報告集, 128-134 (in Japanese).

[OOU] 大仁田義裕, 乙藤隆史, 宇田川誠一: Moduli spaces of complex Fermi curves and the Willmore functional, 数理解析研究所講究録 1527, 「部分多様体論のさらなる発展に向けて」(2006 年 7 月 10 日〜7 月 12 日) 研究集会報告集, 100-127 (in Japanese).

[Otofuji] 乙藤隆史: 4 次元空間内のトーラスのフェルミ曲線とその無限小ダルブー変換 (P.G. Grinevich - I.A. Taimanov の研究の紹介), 数理解析研究所講究録, 「部分多様体論と可積分系および幾何解析とのつながり」(2007 年 7 月 11 日〜7 月 13 日) 研究集会報告集に掲載 (in Japanese).

[TTaniguchi] 谷口哲也: 「Finite gap theory of the Clifford torus」 ― Taimanov の論文から ―, 数理解析研究所講究録, 「部分多様体論と可積分系および幾何解析とのつながり」(2007 年 7 月 11 日〜7 月 13 日) 研究集会報告集に掲載 (in Japanese).


DEPARTMENT OF MATHEMATICS, OSAKA CITY UNIVERSITY, SUGIMOTO, SUMIYOSHI-KU, OSAKA, 558-8585, JAPAN

*E-mail address*: ohnita@sci.osaka-cu.ac.jp